Devoir Maison

Pour le 3 janvier 2023

Exercice 1
(*Banque PT, Maths C 2017*)

Soit F la fonction qui, à tout réel positif x, associe : $\mathrm{e}^{-x^2}\displaystyle\int_0^x \mathrm{e}^{t^2}\mathrm{d}t$.

1. Montrer que la fonction F est dérivable sur $\mathbb{R}$.
2. En appliquant des théorèmes de cours uniquement, et en évitant des calculs trop compliqués, montrer que la fonction F est développable en série entière sur $\mathbb{R}$.
3. Montrer que la fonction F est solution, sur $\mathbb{R}$, de l'équation différentielle :
$$y'(x) = -2\,x\,y(x) + 1 \qquad (\mathcal{E})$$
4. En recherchant le développement en série entière de F sous la forme $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$, donner une relation de récurrence vérifiée par les a_n, $n \geqslant 0$.
5. Pour tout entier naturel p, exprimer a_{2p} et a_{2p+1} en fonction de p.
6. En déduire le développement en série entière de F.
7. Étudier la convergence de la série de terme général
$$\frac{(-1)^n\,4^n n!}{(2n+1)!}$$
8. Donner le développement en série entière de la fonction qui, à tout réel x, associe $\displaystyle\int_0^x \mathrm{e}^{t^2}\mathrm{d}t$ puis déduire de ce qui précède que, pour tout entier naturel n :
$$\sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{2k+1}\binom{n}{k} = \frac{4^n}{(2n+1)\binom{2n}{n}}$$

Exercice 2
(*EML 2018*)

Soit n un entier naturel supérieur ou égal à 2.
On note $E = \mathbb{R}_n[X]$ l'espace vectoriel des polynômes à coefficients réels de degré inférieur ou égal à n, et $\mathcal{B} = (1, X, \ldots, X^n)$ la base canonique de E.
On note, pour tout polynôme P de E :
$$\varphi(P) = \frac{1}{n}X(1-X)P' + XP$$

1. (a) Montrer que φ est une application linéaire.
   (b) Calculer $\varphi(X^n)$.
   (c) Montrer que φ est un endomorphisme de E.
2. Déterminer la matrice A de φ dans la base $\mathcal{B}$. Préciser le rang de cette matrice.
3. (a) L'endomorphisme φ est-il injectif ? Justifier votre réponse.
   (b) Soit P un polynôme non nul de $\mathrm{Ker}(\varphi)$.
   Montrer que P admet 1 comme unique racine (dans $\mathbb{C}$), et que P est de degré n.
   (c) En déduire une base de $\mathrm{Ker}(\varphi)$.
4. Montrer que φ est diagonalisable.
5. On pose, pour tout k de $[\![0, n]\!]$: $P_k = X^k(1-X)^{n-k}$.
   (a) Pour tout k de $[\![0, n]\!]$, calculer $\varphi(P_k)$.
   (b) Montrer que la famille $(P_0, P_1, \ldots, P_n)$ est une base de E et expliciter la matrice de φ dans cette base.
   (c) Déterminer les sous-espaces propres de φ.